verteilung an, dann ist die Schwerelinie auch Kurve mit maximalem Druck. THOMAS [20] hat gezeigt, daß in einer idealen Flüssigkeit die Kurve mit maximalem Druck eine Geodätische ist.

Somit haben wir die eingangs gestellte Frage positiv beantworten können. Eine vollständige Erfassung aller sich geodätisch bewegender Objekte durch Angabe ihrer lokalen Eigenschaften verlangt auch die vollständige Berücksichtigung des Hintergrunds somit faktisch die Lösung der Feldgleichungen. Diese Arbeit verfolgt aber noch als zweites Ziel, aufzuzeigen, wie lokale Eigenschaften eines Objekts auf sein Verhalten als Ganzes wirken. Der Nutzen einer solchen Betrachtungsweise liegt darin, daß es gelegentlich möglich sein sollte, einen Stern näherungsweise hydrodynamisch zu beschreiben, womit dann die Beobachtung seiner Bewegung zu einem Test für die Richtigkeit der versuchten Beschreibung wird. Abschließend sei dazu bemerkt, daß für eine starre Kongruenz mit $\omega \neq 0$ unter geeigneten Näherungsannahmen die Bewegungsgleichung des Dipolteilchens von PAPAPETROU nach der hier aufgezeigten Methode errechnet werden kann.

[20] Y. THOMAS, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **48**, 1567, 2063 [1962].

Einsteinsche Feldgleichungen für das axialsymmetrische, stationäre Gravitationsfeld im Innern einer starr rotierenden idealen Flüssigkeit

MANFRED TRÜMPER

I. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1347—1351 [1967]; eingegangen am 8. Juni 1967)

Herrn Professor Dr. PASCUAL JORDAN *zum 65. Geburtstag gewidmet*

Die EINSTEINschen Gravitationsfeldgleichungen für das Innere einer starr und gleichförmig rotierenden idealen Flüssigkeit werden aufgestellt und vereinfacht. Eine der Feldgleichungen kann sofort integriert werden. Die übrigen bilden ein System von vier quasilinearen, partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für vier Funktionen von zwei Variablen.

Es ist der Zweck dieser Arbeit, über die jüngsten Fortschritte auf dem Wege zur Beschreibung des Gravitationsfeldes eines rotierenden Körpers zu berichten. Sie besteht aus zwei Teilen: Im einführenden, ersten Teil wird eine Normalform des Linienelementes angegeben, im zweiten Teil werden die Feldgleichungen aufgestellt, vereinfacht und diskutiert.

1. Normalform des Linienelementes

Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes eines axialsymmetrischen, starr und stationär rotierenden Körpers muß man zwei Teilaufgaben lösen: Erstens muß man das Linienelement vereinfachen, d. h. die Zahl der Funktionen, die das Problem beschreiben, so weit wie möglich verringern. Das erfolgt durch Anpassung der Koordinaten an die geometrischen Gegebenheiten. Zweitens müssen die Feldgleichungen aufgestellt, untersucht und für geeignete Randwerte gelöst werden.

Die Symmetrien des Problems, Stationarität und Axialsymmetrie, drücken sich dadurch aus, daß die Raumzeit eine 2-parametrige Isometriegruppe G_2 besitzt. Man nimmt an, daß die Isometriegruppe abelsch ist. Anschaulich bedeutet das folgendes: Der Ereignispunkt P', in den ein Punkt P durch Operationen der Gruppe übergeführt wird, ist bereits durch die Summe der Drehungen und die Summe der Zeittranslationen bestimmt, hängt jedoch nicht von der Anordnung der Einzeloperationen ab.

Da die Trajektorien der Gruppe zweidimensionale Flächen bilden, kann man also Koordinaten x^a $(a=1,\ldots,4)$ so einführen, daß etwa die Koordinatenlinien von x^3 und x^4 in den Gruppentrajektorien verlaufen.

Von entscheidender Bedeutung für weitere Vereinfachungen ist sodann die Frage, ob die Trajektorien orthogonale 2-Flächen besitzen. Diese Frage ist erst in letzter Zeit geklärt worden. Pionierarbeit leistete PAPAPETROU [1], als er bewies, daß das Verschwinden des RICCI-Tensors hinreichend für die

[1] A. PAPAPETROU, Ann. Inst. Henri Poicaré A IV, No. 2, 83 [1966].

Existenz von Orthogonalflächen ist. Aus weiteren Arbeiten [2, 3] ergab sich dann, daß hinreichend für die orthogonale Zerlegbarkeit der Raumzeit bereits die Bedingung ist, daß der Tangentenvektor irgendeiner zeitartigen Gruppenbahn ein Eigenvektor des RICCI-Tensors ist. Dabei ist nur vorauszusetzen, daß der zugehörige Wirbelvektor und der Beschleunigungsvektor nicht kollinear sind (vgl. [3]).

Wenn wir, wie es hier geschieht, eine ideale Flüssigkeit als Quelle des Gravitationsfeldes betrachten, sind wir also sicher, daß die Raumzeit in orthogonale 2-Flächen zerlegbar ist. Dann können wir die Koordinaten weiter so anpassen, daß die Gruppentrajektorien durch x^1, $x^2 = \text{const}$, ihre Orthogonalflächen durch x^3, $x^4 = \text{const}$ beschrieben werden. Legt man zudem die Koordinaten in den Gruppentrajektorien dadurch fest, daß für den raumartigen, die axiale Symmetrie erzeugenden KILLING-Vektor $\eta^a = \delta_3{}^a$ und für den zeitartigen KILLING-Vektor $\xi^a = \delta_4{}^a$ gilt, so nimmt die Metrik die Gestalt

$$G = g_{AB}\, \mathrm{d}x^A\, \mathrm{d}x^B + g_{\nu\lambda}\, \mathrm{d}x^\nu\, \mathrm{d}x^\lambda$$

an. Dabei durchlaufen die Indizes A, B die Werte 1 und 2, die Indizes ν, λ die Werte 3 und 4.

Die metrischen Koeffizienten hängen nur von x^1 und x^2 ab. Durch passende Wahl der Koordinaten x^1 und x^2 läßt sich die Metrik der Orthogonal-Flächen $x^\lambda = \text{const}$ auf die „isometrische Form" bringen. Die Zahl der metrischen Koeffizienten ist damit von ursprünglich 10 auf 4 Funktionen reduziert worden. Nach EHLERS [4] ist es vorteilhaft, das Betragsquadrat $\xi^a\, \xi_a =: -e^{2U}$ des zeitartigen KILLING-Vektors bzw. dessen reziproken Wert vor die 2-Flächenelemente zu ziehen. Dann erhält man die zuerst von EHLERS angegebene Normalform

$$G = e^{-2U}[e^{2k}(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2) + F^2\, \mathrm{d}\varphi^2] - e^{2U}(\mathrm{d}t + A\, \mathrm{d}\varphi)^2. \qquad (1)$$

Dabei haben wir $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (r, z, \varphi, t)$ gesetzt. Damit (1) als das Linienelement eines axialsymmetrischen Raumes angesehen werden kann, müssen die Definitionsbereiche der Koordinaten folgendermaßen festgelegt werden:

$$r \geqq 0, \quad -\infty < z < +\infty, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Damit hat man eine Art Zylinderkoordinaten eingeführt.

Die verbleibenden Koordinatentransformationen, die diese Form des Linienelementes festlassen, sind außer den Translationen und der Spiegelung in den Gruppentrajektorien noch die konformen Abbildungen ihrer Orthogonalflächen auf sich:

$$r + i\,z \rightarrow f(r + i\,z),$$

wenn f eine komplexe analytische Funktion ist.

Regularitätsbedingungen auf der Achse

Wir geben jetzt Bedingungen an, denen die Funktionen U, A, F, k auf der Rotationsachse ($r = 0$, $t = \text{const}$) genügen müssen.

Da die Achse aus Fixpunkten der Drehung besteht, muß auf ihr für alle Werte von z gelten

$$e^{-2U} F^2 - e^{2U} A^2 = 0\,. \qquad (2)$$

Weiter ist zu verlangen, daß lokal euklidische Verhältnisse vorliegen: Für einen kleinen Kreis mit $r = \varepsilon$ sollen der metrische Umfang $2\pi(e^{-2U} F^2 - e^{2U} A^2)^{1/2}$ und der metrische Radius $e^{-U+k}\,\varepsilon$ im limes das Verhältnis 2π haben:

$$\lim_{r\to 0}\, [r^{-1}\, e^{U-k}(e^{-2U} F^2 - e^{2U} A^2)^{1/2}] = 1. \qquad (3)$$

Schließlich soll der Wirbelskalar, dessen Quadrat

$$\omega^2 = \tfrac{1}{4} F^{-2}\, e^{6U-2k}(A_1{}^2 + A_2{}^2) \quad {}^5 \qquad (4)$$

ist, auf der Achse endlich sein.

2. Feldgleichungen für das innere und äußere Feld einer idealen Flüssigkeit

Eine ideale Flüssigkeit mit der Dichte μ, dem Druck p und der Geschwindigkeit u^a wird durch einen Energieimpulstensor

$$T_{ab} = (\mu + p)\, u_a\, u_b + p\, g_{ab}$$

beschrieben. Zur Beschreibung des stationär rotierenden Körpers müssen wir annehmen, daß die Bahnen der Materieströmung zugleich Gruppenbahnen sind, mit anderen Worten, daß die Strömung isometrisch ist.

Die Berechnung des RICCI-Tensors wird mit Hilfe des Kalküls der alternierenden Differentialformen ausgeführt, wobei die Formen $\Theta_{(k)} = e^k{}_a\, \mathrm{d}x^a$, die

[2] W. KUNDT u. M. TRÜMPER, Z. Physik **192**, 419 [1966].
[3] B. SCHMIDT, Z. Naturforschg. **22 a**, 1351 [1967].
[4] J. EHLERS, Dissertation, Hamburg 1957.
[5] Die Indizes an den Funktionen U, A, F, k bezeichnen hier und im folgenden partielle Ableitungen.

nach $G = \Theta_{(k)}\,\Theta_{(k)}$ die Metrik G bestimmen, mit dem orthonormalen Vierbein

$$e_a{}^1 = e^{-U+k}\,\delta_a{}^1,\quad e_a{}^2 = e^{-U+k}\,\delta_a{}^2,\quad e_a{}^3 = e^{-U}\,F\,\delta_a{}^3,$$
$$e_a{}^4 = i\cdot e^{U}(A\,\delta_a{}^3 + \delta_a{}^4),\qquad (i^2 = -1),$$

gebildet sind. Die Feldgleichungen nehmen in dem Bein die einfache Gestalt

$$R_{kl} - \tfrac{1}{2}\,R\,\delta_{kl} = (\mu + p)\,\delta_k{}^4\,\delta_l{}^4 - p\,\delta_{kl}$$

an (δ_{kl} ist das KRONECKER-Symbol).

Bezeichnen wir mit (kl) die Feldgleichungskomponente bezüglich des Beinvektorpaares $e^k{}_a$, $e^l{}_a$, so lauten die Feldgleichungen

$$(11):\quad e^{2U-2k}[U_1{}^2 - U_2{}^2 - F^{-1}(F_{22} + k_1\,F_1 - k_2\,F_2) - \tfrac{1}{4}\,F^{-2}\,e^{4U}(A_1{}^2 - A_2{}^2)] = -p\,,$$
$$(22):\quad e^{2U-2k}[U_2{}^2 - U_1{}^2 - F^{-1}(F_{11} + k_2\,F_2 - k_1\,F_1) - \tfrac{1}{4}\,F^{-2}\,e^{4U}(A_2{}^2 - A_1{}^2)] = -p\,,$$
$$(12):\quad e^{2U-2k}[2\,U_1\,U_2 + F^{-1}(F_{12} - k_1\,F_2 - k_2\,F_1) - \tfrac{1}{2}\,F^{-2}\,e^{4U}\,A_1\,A_2] = 0\,,$$
$$(33):\quad e^{2U-2k}[-(U_1{}^2 + U_2{}^2) - (k_{11} + k_{22}) - \tfrac{1}{4}\,F^{-2}\,e^{4U}(A_1{}^2 + A_2{}^2)] = -p\,,$$
$$(34):\quad \tfrac{1}{2}i\,F^{-1}\,e^{4U-2k}[A_{11} + A_{22} + 4(A_1\,U_1 + A_2\,U_2) - F^{-1}(A_1\,F_1 + A_2\,F_2)] = 0\,,$$
$$(44):\quad e^{2U-2k}[2(U_{11} + U_{22}) - U_1{}^2 - U_2{}^2 + 2\,F^{-1}\,(U_1\,F_1 + U_2\,F_2)$$
$$- F^{-1}(F_{11} + F_{22}) - k_{11} - k_{22} + \tfrac{3}{4}\,F^{-2}\,e^{4U}(A_1{}^2 + A_2{}^2)] = \mu\,.$$

Die übrigen Feldgleichungen sind identisch erfüllt. Wir haben die Gleichungen in dieser etwas umständlichen Form angegeben, damit man aus den linken Seiten den RICCI-Tensor entnehmen kann.

Durch Bildung von Linearkombinationen lassen sich obige Gleichungen beträchtlich vereinfachen:

$$F_{11} + F_{22} = 2\,p\,F\,e^{2k-2U}, \tag{5}$$
$$U_{11} + U_{22} + F^{-1}(U_1\,F_1 + U_2\,F_2) + \tfrac{1}{2}\,F^{-2}\,e^{4U}(A_1{}^2 + A_2{}^2) = \tfrac{1}{2}\,(\mu + 3\,p)\,e^{2k-2U}\,, \tag{6}$$
$$A_{11} + A_{22} - F^{-1}(A_1\,F_1 + A_2\,F_2) + 4(A_1\,U_1 + A_2\,U_2) = 0\,, \tag{7}$$
$$2(F_1 + i\,F_2)\,(k_1 + i\,k_2) - (F_{11} - F_{22} + 2\,i\,F_{12})$$
$$- 2(U_1{}^2 - U_2{}^2 + 2\,i\,U_1\,U_2)\,F + \tfrac{1}{2}\,F^{-1}\,e^{4U}(A_1{}^2 - A_2{}^2 + 2\,i\,A_1\,A_2) = 0\,, \tag{8}$$
$$k_{11} + k_{22} + U_1{}^2 + U_2{}^2 + \tfrac{1}{4}\,F^{-2}\,e^{4U}(A_1{}^2 + A_2{}^2) = p\,e^{2k-2U}\,. \tag{9}$$

Dieses System von sechs reellen Differentialgleichungen ist mit den Feldgleichungen gleichwertig. Aus dem Erhaltungssatz $T^c_{a;c} = 0$ folgen noch die zwei Gleichungen

$$p_1 + i\,p_2 + (\mu + p)\,(U_1 + i\,U_2) = 0\,, \tag{10}$$

die natürlich eine Folge der Gln. (5) bis (9) sind.

Man sieht, daß die Flächen konstanten Druckes mit den Äquipotentialflächen $U = \text{const}$ übereinstimmen. Außerdem folgt aus (10), daß für $p \neq \text{const}$ die Dichte μ entweder konstant oder eine Funktion von p ist. Man muß also zur Beschreibung der stationär rotierenden Flüssigkeit eine Zustandsgleichung $\mu = \mu(p)$ vorgeben. Tut man das, dann sind nach Integration von (10) Druck und Dichte bekannte Funktionen von U.

Die komplexe Schreibweise von (8) wird nahegelegt durch die bereits erwähnte Invarianz des Linienelementes unter Transformationen mit komplexen analytischen Funktionen von $x^1 + i\,x^2$. Aus diesem Grunde wird es sich auch als zweckmäßig erweisen, komplexe Differentiationsoperatoren

$$\partial := \tfrac{1}{2}(\partial/\partial x^1 + \partial/i\,\partial x^2),\qquad \bar\partial := \tfrac{1}{2}(\partial/\partial x^1 - \partial/i\,\partial x^2)$$

einzuführen, wie man sie auch in der Theorie der verallgemeinerten analytischen Funktionen benutzt [6]. Die Gln. (5) bis (10) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$2\,\bar\partial\,\partial\,F = p\,F\,e^{2k-2U}\,, \tag{11}$$
$$2\,\partial\,\bar\partial U + F^{-1}(\partial U\,\bar\partial F + \bar\partial U\,\partial F)$$
$$+ F^{-2}\,e^{4U}\,\bar\partial A\,\partial A = \tfrac{1}{4}(\mu + 3\,p)\,e^{2k-2U}, \tag{12}$$
$$2\,\partial\,\bar\partial A - F^{-1}(\partial A\,\bar\partial F + \bar\partial A\,\partial F)$$
$$+ 4(\partial A\,\bar\partial U + \bar\partial A\,\partial U) = 0\,, \tag{13}$$
$$2\,\bar\partial F\,\bar\partial k - \bar\partial\,\bar\partial F - 2\,F\,\bar\partial U\,\bar\partial U + \tfrac{1}{2}F^{-1}\,e^{4U}\,\bar\partial A\,\bar\partial A = 0\,, \tag{14}$$
$$\partial\,\bar\partial k + \partial U\,\bar\partial U + \tfrac{1}{4}F^{-2}\,e^{4U}\,\partial A\,\bar\partial A = \tfrac{1}{4}\,p\,e^{2k-2U}\,, \tag{15}$$
$$\partial p + (\mu + p)\,\partial U = 0\,. \tag{16}$$

[6] Siehe z. B. I. N. VEKUA, Verallgemeinerte analytische Funktionen, Akademie-Verlag, Berlin 1963.

Wie man sieht, bringt der Kalkül eine beachtliche Vereinfachung bei der Formulierung der in (8) enthaltenen zwei reellen Differentialgleichungen mit sich, während er für die anderen Gleichungen zumindest keine Komplizierung bedeutet.

An den Gleichungen fällt auf, daß zweite Ableitungen von k nur in (15) auftreten, während das Differential $\bar\partial k$ nur in (14) vorkommt. Sonst steht k nur noch undifferenziert in (11) und (12). Wir behaupten den folgenden

Satz 1: Die Feldgleichungen unseres Problems sind mit den 6 partiellen Diff.-Gln. (11), (12), (13), (14), (16) gleichwertig. Im Falle eines äußeren Feldes ($\mu=0=p$) besagt die aus den übrigen Gleichungen folgende Gl. (15), daß $\bar\partial k$ ein totales Differential ist und nur noch die Beziehungen (11), (12) und (13) erfüllt werden müssen.

Zum Beweis dieses Satzes ist nur zu zeigen, daß (15) aus den übrigen Gleichungen folgt. Dazu wenden wir die Differentiation $2\,\partial$ auf (14), $\bar\partial$ auf (11) an und addieren. Sodann eliminieren wir $\partial\,\bar\partial F$, $\partial\,\bar\partial U$, $\partial\,\bar\partial A$, $\bar\partial k$ und $\bar\partial p$ mit Hilfe von (11) bis (14) und (16). Diese Rechnung ergibt (15). Im Falle $\mu=0=p$ kann man eine Lösung (U, A, F) von (11), (12), (13) in (14) einsetzen und erhält für k ein Differential der Form $\bar\partial k=\lambda$, mit komplexer rechter Seite λ. Die Integrabilitätsbedingungen dafür lauten $\overline{\partial\,\lambda}-\partial\lambda=0$ und sind wegen (15) erfüllt, denn aus (15) folgt, da alle Terme reell sind,

$$\overline{\partial\lambda}-\partial\lambda=\bar\partial\,\partial k-\partial\,\bar\partial k=0\,.$$

Der Satz erlaubt uns, (15) durch die sofort integrierbare Diff.-Gl. (16) zu ersetzen und damit die Zahl der zu lösenden Diff.-Gln. um eine zu verringern.

Bemerkungen über Vakuumlösungen

Für äußere Felder ($\mu=p=0$) vereinfachen sich die Feldgleichungen beträchtlich, wie von EHLERS [4] in besonders übersichtlicher Weise beschrieben wurde (vgl. auch [1]). Während (12) fortfällt, kann (11), dessen rechte Seite ja verschwindet, ohne Einschränkung der Allgemeinheit durch $F=x^1$ erfüllt werden. Damit hat man über die Konformtransformation der x^1, x^2-Fläche verfügt.

Nach Satz 1 hat man „nur“ zwei elliptische Diff.-Gln. für zwei Funktionen U, A von zwei Variablen zu lösen. Die Funktion k ist dadurch mitbestimmt.

Von verschiedenen Verfassern sind äußere Lösungen angegeben worden, u. a. von CAHEN und DEBEVER [7], EHLERS [4], KERR [8], PAPAPETROU [1, 9]. Die interessanteste Lösung ist die von KERR, die das äußere Feld einer rotierenden Masse beschreibt. Sie hängt von einem Parameter ab, der die Rotationsgeschwindigkeit kennzeichnet und enthält als Grenzfall für verschwindende Rotation die SCHWARZSCHILDsche Lösung.

Beim gegenwärtigen Stand des Problems scheint es am wichtigsten zu sein, die Frage zu klären, welches sinnvolle Randwertproblem mit den Feldgleichungen für U und A verknüpft werden kann. Sinnvoll ist ein Randwertproblem zu nennen, wenn es eine eindeutige, stetig von den Randwerten abhängende Lösung gestattet.

Bemerkungen über Lösungen mit druckfreier Materie

Im Falle $p=0$ kann wegen (11) ebenfalls $F=x^1$ gesetzt werden. Aus (16) folgt, daß U konstant ist. Dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $U=0$ setzen. Die verbleibenden Feldgleichungen sind dann ($x^1=r$, $x^2=z$).

$$4\,r^{-2}\,\partial A\,\bar\partial A=\mu\,e^{2k}\,, \tag{17}$$

$$2\,r\,\partial\,\bar\partial A-\partial A-\bar\partial A=0\,, \tag{18}$$

$$4\,r\,\bar\partial k+\bar\partial A\,\bar\partial A=0\,. \tag{19}$$

Hat man eine Lösung A von (18), so kann man aus (19) durch Integration k ausrechnen und anschließend aus (17) μ entnehmen. An Stelle von (18) kann man auch von einer Lösung V der dreidimensionalen LAPLACE-Gleichung

$$2\,r\,\partial\,\bar\partial V+\partial V+\bar\partial V=0 \tag{20}$$

ausgehen. Die Substitution $\partial A=-2\,i\,r\,\partial V$ führt nämlich beide Gleichungen ineinander über und die Integrabilitätsbedingungen sind ebenfalls erfüllt. Bedenkt man noch, daß statische, axialsymmetrische Lösungen der äußeren Feldgleichungen $R_{ab}=0$ durch Lösungen von (20) beschrieben sind [10, 11], so erhält man den von EHLERS allgemeiner, ohne die Annahme der Axialsymmetrie bewiesenen

[7] M. CAHEN u. R. DEBEVER, unveröfftlicht.
[8] R. P. KERR, Phys. Rev. Letters **11**, 237 [1963].
[9] A. PAPAPETROU, Ann. Phys. **12**, 309 [1953].
[10] H. WEYL, Ann. Phys. **59**, 185 [1919].
[11] Das folgt sofort aus (11) bis (16), wenn man μ, p und A gleich Null und $F=x^1$ setzt.

Satz 2: Die axialsymmetrischen, stationären Lösungen der Feldgleichungen für druckfreie Materie sind auf umkehrbar eindeutige Weise den axialsymmetrischen, statischen Vakuumlösungen zugeordnet.

Materie mit Druck

Im allgemeinen Fall ($\mu \neq 0 \neq p$) sind bisher keine physikalisch brauchbaren Lösungen angegeben worden, Lösungen also, die zu einer räumlich begrenzten Massenverteilung gehören. Das interessanteste, zweifellos schwierige Problem dürfte sein, eine innere Lösung zu finden, die sich an das von KERR angegebene Außenfeld anschließt. Auf der Grenzfläche $p=0$, die zugleich eine Fläche $U=\text{const}$ ist, verlangen die Anschlußbedingungen von LICHNEROWICZ die Stetigkeit der metrischen Koeffizienten und ihrer ersten Normalableitungen. Auch hier, wie im Fall von äußeren Lösungen, kann nur eine Klärung des Randwertproblems weitere Fortschritte bringen.

Isometry Groups with Surface-Orthogonal Trajectories

BERND SCHMIDT

1. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1351—1355 [1967]; received 2 June 1967)

Dedicated to Professor PASCUAL JORDAN *on the occasion of his 65th birthday*

It is shown that the trajectories of an isometry group admit orthogonal surfaces if the sub-group of stability leaves no vector in the tangent space of the trajectories fixed. A necessary and sufficient condition is given that the trajectories of an ABELian group admit orthogonal surfaces.

In spacetimes which admit an ABELian G^2 of isometries, the trajectories admit orthogonal 2-surfaces if a timelike congruence exists with the following properties: the curves lie in the trajectories and are invariant under G^2; ω^a and $\dot{u}^a$ are linearly independent and orthogonal to the trajectories.

Many of the known exact solutions of EINSTEIN's field equations are spacetimes admitting isometry groups, because symmetries simplify the problem of solving the equations. A considerable simplification can be achieved in cases where the trajectories of the groups admit orthogonal surfaces. Furthermore CARTER [1] has recently pointed out a global significance of orthogonal surfaces.

A theorem of § 1 shows that a certain property of the sub-group of stability or isotropy-group is sufficient for the existence of orthogonal surfaces. A second theorem shows that another property of the sub-group of stability implies the trajectories to be conformally mapped by the orthogonal surfaces. This fact makes possible a further strong simplification of the metric. The assumptions of both theorems are satisfied if the isometry group is the maximal group in the trajectories. An example for this case is a 3-dimensional group with 2-dimensional trajectories. The application of this reasoning to spherically symmetric space times yields a simple derivation of the line element.

[1] B. CARTER, Preprint Cambridge 1966.

We can prove these theorems without any calculation. We simply use the properties of an isometry group, for example that a geodesic is mapped into a geodesic. This consideration is superior to the usual method (integration of the KILLING equation with a given representation of the LIE algebra of the group as infinitesimal transformations on a manifold). Additionally, we obtain not only the line element in its simplest form, but we even understand geometrically how the properties of the group imply these simplifications.

In § 2 the results of § 1 are applied to ABELian isometry groups. We will give necessary and sufficient conditions that the trajectories of the group admit orthogonal surfaces. In this context a discrete isometry – a reflection – is particularly important.

In § 3 we consider spacetimes with an ABELian group G^2 of isometries. The stationary field of a rotating body has this symmetry. Concerning the integration of the field equations it is important to know whether the trajectories admit orthogonal surfaces or not. We show that the following properties are necessary conditions: the timelike congruence